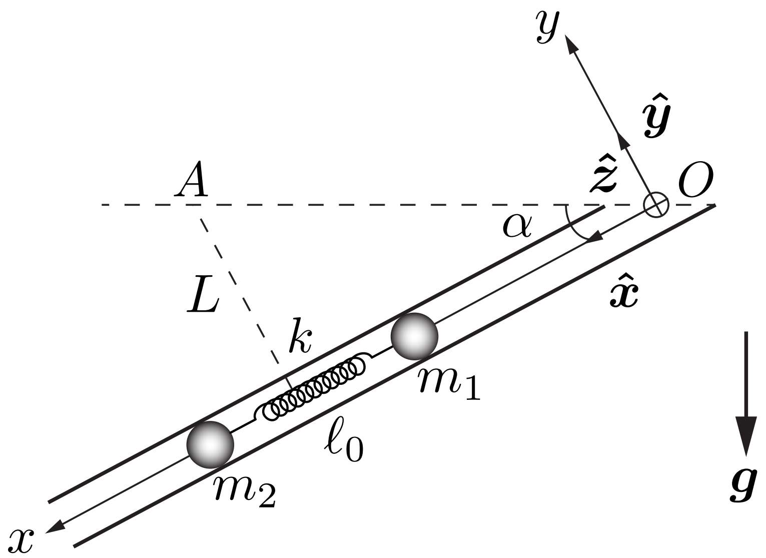
1. Billes oscillant dans un tube (3.5/10 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Dans un plan vertical, une bille considérée comme un point matériel de masse m_1 est reliée à une autre bille considérée comme un point matériel de masse m_2 par un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0. Le système constitué des deux points matériels est astreint à se déplacer sans frottement le long d'un tube immobile qui fait un angle α avec la droite horizontale passant par les points O et A. On décrit la dynamique du système de points matériels par rapport au repère cartésien $(O, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$. Soit $\boldsymbol{r}_1 = x_1\,\hat{\boldsymbol{x}}$ le vecteur position du point matériel de masse m_1, $\boldsymbol{r}_2 = x_2\,\hat{\boldsymbol{x}}$ le vecteur position du point matériel de masse m_2 et g la norme du champ gravitationnel $\boldsymbol{g}$. Soient $M = m_1 + m_2$ la masse totale du système, $\mu = m_1\,m_2/(m_1 + m_2)$ la masse réduite du système, $\Delta m = m_2 - m_1$ la différence de masse entre les deux points matériels et L la distance qui sépare le point A de l'axe Ox de symétrie du tube. On suppose qu'il n'y a aucune force de frottement à considérer dans ce problème.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.0 point**) Déterminer les deux équations scalaires du mouvement des points matériels de masse m_1 et m_2, résultant de la projection des lois vectorielles du mouvement de ces points matériels le long de l'axe Ox de symétrie du tube, en termes des coordonnées de positions x_1 et x_2, des dérivées temporelles de ces coordonnées de position et des grandeurs scalaires constantes m_1, m_2, g, α, k, ℓ_0 :

   Les forces extérieures exercées sur les deux sous-systèmes formées des points matériels de masses m_1 et m_2 sont leurs poids $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$, les forces élastiques $\boldsymbol{F}_{e,1}$ et $\boldsymbol{F}_{e,2}$ exercées par le ressort et les forces de réaction normale $\boldsymbol{N}_1$ et $\boldsymbol{N}_2$ exercées par le tube. Ces forces sont exprimées en coordonnées cartésiennes comme,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}_1 = m_1\,\boldsymbol{g} = m_1\,g\,(\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}) &&\text{et}&& \boldsymbol{P}_2 = m_2\,\boldsymbol{g} = m_2\,g\,(\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}})\\ &\boldsymbol{F}_{e,1} = k\,\Big((x_2 - x_1) - \ell_0\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}} &&\text{et}&& \boldsymbol{F}_{e,2} = -\,\boldsymbol{F}_{e,1} = -\,k\,\Big((x_2 - x_1) - \ell_0\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}\\ &\boldsymbol{N}_1 = N_1\,\hat{\boldsymbol{y}} &&\text{et}&& \boldsymbol{N}_2 = N_2\,\hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned}$$

   Les accélérations des points matériels de masse m_1 et m_2, orientées le long de l'axe de symétrie Ox du tube s'écrivent,

$$\boldsymbol{a}_1 = \ddot{x}_1\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \ddot{x}_2\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

   Les lois vectorielles du mouvement des deux points matériels sont,

$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{F}_1^{\text{ext}} &= \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{F}_{e,1} + \boldsymbol{N}_1 = m_1\,\boldsymbol{a}_1\\ \sum \boldsymbol{F}_2^{\text{ext}} &= \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{F}_{e,2} + \boldsymbol{N}_2 = m_2\,\boldsymbol{a}_2 \end{aligned}$$

   Les projections de ces lois vectorielles le long de l'axe Ox de symétrie du tube s'écrivent,

$$\begin{aligned} \text{masse}\quad m_1 :&\quad m_1\,g\,\sin\alpha + k\,\Big((x_2 - x_1) - \ell_0\Big) = m_1\,\ddot{x}_1\\ \text{masse}\quad m_2 :&\quad m_2\,g\,\sin\alpha - k\,\Big((x_2 - x_1) - \ell_0\Big) = m_2\,\ddot{x}_2 \end{aligned}$$

2. (**1.0 point**) Compte tenu des conditions initiales $x_1(0) = -\,d$ et $x_2(0) = d$ sur les coordonnées de position et les conditions initiales $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ sur les coordonnées de vitesse, déterminer l'évolution temporelle de la coordonnée $X_G(t)$ du centre de masse et l'évolution temporelle de la coordonnée relative $x(t)$, définies respectivement comme,

$$X_G = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{et} \qquad x = x_2 - x_1$$

   en termes du temps t et des constantes g, d, ℓ_0, α, k, M, Δm et μ :

   Les dérivées temporelles première et seconde de la coordonnée de position du centre de masse X_G s'écrivent,

$$\dot{X}_G = \frac{m_1\,\dot{x}_1 + m_2\,\dot{x}_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{et} \qquad \ddot{X}_G = \frac{m_1\,\ddot{x}_1 + m_2\,\ddot{x}_2}{m_1 + m_2}$$

   Par conséquent, en divisant la somme des équations du mouvement des deux points matériels par la masse totale $M = m_1 + m_2$, on obtient,

$$\ddot{X}_G = \frac{m_1\,\ddot{x}_1 + m_2\,\ddot{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\,g\,\sin\alpha + m_2\,g\,\sin\alpha}{m_1 + m_2} = g\,\sin\alpha$$

   Compte tenu des conditions initiales $x_1(0) = -\,d$, $x_2(0) = d$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, les conditions initiales sur les coordonnées de position X_G et de vitesse $\dot{X}_G$ du centre de masse sont,

$$X_G(0) = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,d = \frac{\Delta m}{M}\,d \qquad \text{et} \qquad \dot{X}_G(0) = 0$$

En intégrant deux fois successivement l'équation du mouvement du centre de masse par rapport au temps, on trouve,

$$X_G\,(t) = \frac{1}{2}\,g\,\sin\alpha\,t^2 + \frac{\Delta m}{M}\,d$$

De plus, les dérivées temporelles première et seconde de la coordonnée de position relative x s'écrivent,

$$\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \qquad \text{et} \qquad \ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$$

Par conséquent, en prenant la différence des équations du mouvement des deux points matériels divisée par leur masse, on obtient,

$$\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\,k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\Big((x_2 - x_1) - \ell_0\Big) = -\,\frac{k}{\mu}\,(x - \ell_0)$$

A l'aide de la coordonnée de déformation relative du ressort $y = x - \ell_0$, dont la dérivée temporelle seconde est $\ddot{y} = \ddot{x}$, l'équation du mouvement peut être mise sous la forme,

$$\ddot{y} + \frac{k}{\mu}\,y = 0$$

Elle décrit un oscillateur harmonique dont la solution générale est de la forme,

$$y\,(t) = A\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,t + \varphi\right)$$

où A est l'amplitude du mouvement et φ est l'angle de déphasage. Ainsi, la solution générale de la coordonnée de position relative et sa dérivée temporelle s'écrivent,

$$x\,(t) = A\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,t + \varphi\right) + \ell_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{x}\,(t) = -\,A\,\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,t + \varphi\right)$$

Compte tenu des conditions initiales $x_1\,(0) = -\,d$, $x_2\,(0) = d$ et $\dot{x}_1\,(0) = \dot{x}_2\,(0) = 0$, les conditions initiales sur la coordonnée de position relative x et sur sa dérivée temporelle $\dot{x}$ sont,

$$x\,(0) = 2d \qquad \text{et} \qquad \dot{x}\,(0) = 0$$

ce qui implique que,

$$\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad A + \ell_0 = 2d$$

Ainsi, la coordonnée de position relative comme fonction du temps s'écrit explicitement,

$$x\,(t) = \Big(2d - \ell_0\Big)\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,t\right) + \ell_0$$

3. (**1.0 point**) En prenant comme référence d'énergie potentielle gravitationnelle la droite horizontale qui passe par les points A et O et comme référence d'énergie potentielle élastique l'état du ressort au repos, déterminer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du système de points matériels en termes des coordonnées de position X_G et x, des coordonnées de vitesse $\dot{X}_G$ et $\dot{x}$ et des grandeurs scalaires constantes M, μ, g, α, k, ℓ_0 :

L'énergie cinétique des totale T des deux points matériels s'écrit,

$$T = \frac{1}{2}\,m_1\,\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,\boldsymbol{v}_2^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,\dot{x}_2^2$$

En inversant les relations entre les coordonnées, on trouve,

$$x_1 = X_G - \frac{m_2}{M}\,x = X_G - \frac{\mu}{m_1}\,x \qquad \text{et} \qquad x_2 = X_G + \frac{m_1}{M}\,x = X_G + \frac{\mu}{m_2}\,x$$

La dérivée temporelle de ces relations s'écrit,

$$\dot{x}_1 = \dot{X}_G - \frac{\mu}{m_1}\,\dot{x} \qquad \text{et} \qquad \dot{x}_2 = \dot{X}_G + \frac{\mu}{m_2}\,\dot{x}$$

L'énergie cinétique des totale T des deux points matériels peut alors être mise sous la forme,

$$T = \frac{1}{2}\,m_1\left(\dot{X}_G - \frac{\mu}{m_1}\,\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\,m_2\left(\dot{X}_G + \frac{\mu}{m_2}\,\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\,(m_1+m_2)\,\dot{X}_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\mu^2\dot{x}^2$$

Ainsi, l'énergie cinétique T se réduit à,

$$T = \frac{1}{2}\,M\,\dot{X}_G^2 + \frac{1}{2}\,\mu\,\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle V totale du système est la somme de l'énergie potentielle gravitationnelle V_g et de l'énergie potentielle élastique V_e :

$$V = V_g + V_e = -\,m_1\,g\,x_1\,\sin\alpha - \,m_2\,x_1\,g\,\sin\alpha + \frac{1}{2}\,k\,\Big(\,(x_2 - \,x_1) - \,\ell_0\Big)^2$$

Ainsi, l'énergie potentielle V se réduit à,

$$V = -\,M\,g\,X_G\,\sin\alpha + \frac{1}{2}\,k\,(x - \,\ell_0)^2$$

4. (**0.5 point**) Déterminer l'expression vectorielle du moment cinétique $\boldsymbol{L}_A$ du système de points matériels évalué au point A en termes des grandeurs scalaires constantes M, L, de la coordonnée de vitesse du centre de masse $\dot{X}_G$ ou de la coordonnée de vitesse relative $\dot{x}$ et d'un vecteur unitaire du repère cartésien $(O,\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}})$ (n.b. signe inclus) :

Le moment cinétique $\boldsymbol{L}_A$ du système de points matériels évalué au point A est la somme des moments cinétiques des deux points matériels,

$$\boldsymbol{L}_A = (\boldsymbol{r}_1 - \,\boldsymbol{OA}) \times \,m_1\,\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \,\boldsymbol{OA}) \times \,m_2\,\boldsymbol{v}_2$$

Compte tenu du fait que les points matériels sont astreints à se déplacer le long de l'axe Ox, le moment cinétique $\boldsymbol{L}_A$ s'écrit,

$$\boldsymbol{L}_A = (x_1\,\hat{\boldsymbol{x}} - \,L\,\hat{\boldsymbol{y}}) \times \,m_1\,\dot{x}_1\,\hat{\boldsymbol{x}} + (x_2\,\hat{\boldsymbol{x}} - \,L\,\hat{\boldsymbol{y}}) \times \,m_2\,\dot{x}_2\,\hat{\boldsymbol{x}} = (m_1\,\dot{x}_1 + m_2\,\dot{x}_2)\,L\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

Ainsi, le moment de cinétique $\boldsymbol{L}_A$ se réduit à,

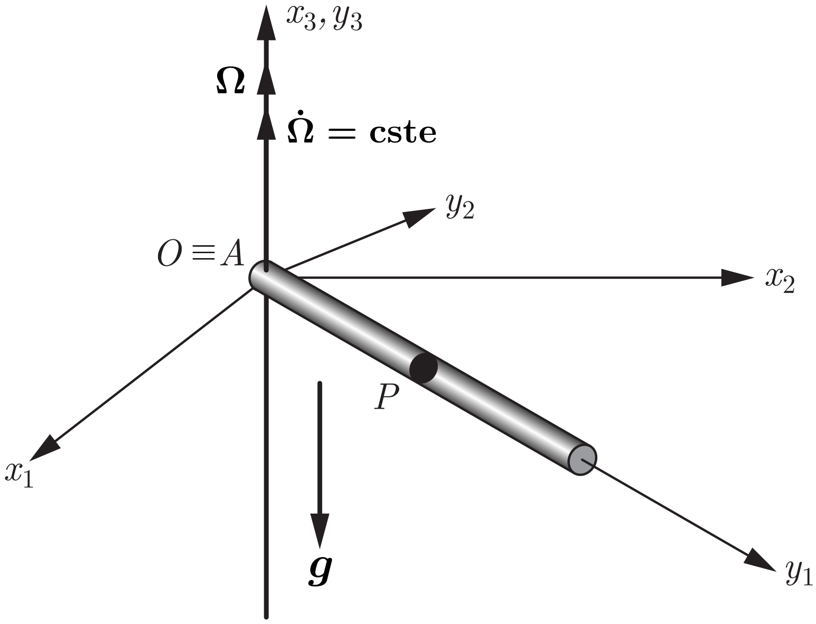
$$\boldsymbol{L}_A = M\,\dot{X}_G\,L\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

2. Centrifugeuse accélérée (3.5/10 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



On considère une centrifugeuse constituée d'un tube tournant dans un plan horizontal avec une accélération angulaire $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\Omega}\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$ constante et une vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$ autour de son extrémité située au point O. Un point matériel P de masse m est astreint à se déplacer le long du tube. On associe au référentiel absolu de la centrifugeuse le repère absolu $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$ et au référentiel relatif du tube le repère relatif $(O, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3)$ où l'axe Oy_1 est orienté le long du tube. Le point matériel est soumis au champ gravitationnel $\boldsymbol{g} = -\,g\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$ et à l'action d'une force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}_f = -\,\dfrac{m}{\tau}\,\boldsymbol{v}_r\,(P)$ où τ est le temps d'amortissement et $\boldsymbol{v}_r\,(P)$ est la vitesse relative du point matériel.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.5 point**) Dans le référentiel relatif du tube, établir les expressions vectorielles de la force centrifuge $\boldsymbol{F}_c$, de la force de Coriolis $\boldsymbol{F}_C$ et de la force d'Euler $\boldsymbol{F}_E$ en termes des coordonnées cartésiennes de position relative, des coordonnées cartésiennes de vitesse relative, des grandeurs scalaires m, Ω, $\dot{\Omega}$ et des vecteurs unitaires du repère relatif cartésien $(O, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3)$ (n.b. signe inclus) :

   Les vecteurs position, vitesse et accélération relatives du point matériel P, qui se déplace le long de l'axe de coordonnée relative radial Oy_1, sont écrits en coordonnées cartésiennes relatives comme,
$$\boldsymbol{r}_r\,(P) = y_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{v}_r\,(P) = \dot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{a}_r\,(P) = \ddot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1$$
   Les vecteurs vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$, accélération angulaire $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ sont écrits comme,
$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{y}}_3 \qquad \text{et} \qquad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\Omega}\,\hat{\boldsymbol{y}}_3$$
   Par conséquent, la force centrifuge $\boldsymbol{F}_c$ est donnée par,
$$\boldsymbol{F}_c = -\,m\,\boldsymbol{\Omega}\times\Big(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_r\,(P)\Big) = -\,m\,\Omega^2 y_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_3\times(\hat{\boldsymbol{y}}_3\times\hat{\boldsymbol{y}}_1) = m\,\Omega^2 y_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1$$
   la force de Coriolis $\boldsymbol{F}_C$ s'écrit,
$$\boldsymbol{F}_C = -\,2\,m\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r\,(P) = -\,2\,m\,\Omega\,\dot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_3\times\hat{\boldsymbol{y}}_1 = -\,2\,m\,\Omega\,\dot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_2$$
   et la force d'Euler s'exprime comme,
$$\boldsymbol{F}_E = -\,m\,\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{r}_r\,(P) = -\,m\,\dot{\Omega}\,y_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_3\times\hat{\boldsymbol{y}}_1 = -\,m\,\dot{\Omega}\,y_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_2$$

2. (**1.0 point**) Dans le référentiel relatif du tube, déterminer l'équation scalaire du mouvement le long de l'axe de coordonnées relatif Oy_1 et l'expression vectorielle de la force de réaction normale du tube $\boldsymbol{N}$ en termes des coordonnées cartésiennes de position relative et de leurs dérivées temporelles, des grandeurs scalaires m, g τ, Ω, $\dot{\Omega}$ et des vecteurs unitaires du repère relatif cartésien $(O, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3)$ (n.b. signe inclus) :

   Les forces extérieures exercées sur le point matériel sont son poids $\boldsymbol{P}$, la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ et la force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}_f$ qui s'expriment en coordonnées cartésiennes relatives comme,
$$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{y}}_3 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{N} = N_2\,\hat{\boldsymbol{y}}_2 + N_3\,\hat{\boldsymbol{y}}_3 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{F}_f = -\,\frac{m}{\tau}\,\boldsymbol{v}_r\,(P) = -\,\frac{m}{\tau}\,\dot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1$$
   La loi vectorielle du mouvement relatif s'écrit comme,
$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_f + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_E = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P)$$
   La projection de cette loi le long des lignes de coordonnées cartésiennes relatives donne lieu à trois équations scalaires,
$$\begin{aligned}
&\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}_1 : \quad -\,\frac{m}{\tau}\,\dot{y}_1 + m\,\Omega^2 y_1 = m\,\ddot{y}_1\\
&\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}_2 : \quad N_2 -\,2\,m\,\Omega\,\dot{y}_1 -\,m\,\dot{\Omega}\,y_1 = 0\\
&\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{y}}_3 : \quad -\,mg + N_3 = 0
\end{aligned}$$
   Par conséquent, la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ s'écrit explicitement comme,
$$\boldsymbol{N} = m\,\Big(2\,\Omega\,\dot{y}_1 + \dot{\Omega}\,y_1\Big)\,\hat{\boldsymbol{y}}_2 + mg\,\hat{\boldsymbol{y}}_3$$

3. (**1.0 point**) Dans la limite où la norme de la force centrifuge est négligeable par rapport à la norme de la force de frottement visqueux, i.e. $\|\boldsymbol{F}_c\| \ll \|\boldsymbol{F}_f\|$, déterminer l'équation horaire $y_1(t)$ le long du tube compte tenu des conditions initiales $y_1(0) = 0$ et $\dot{y}_1(0) = v_1$ en termes de v_1 et d'autres grandeurs scalaires.

La condition physique sur les normes des forces $\|\boldsymbol{F}_c\| \ll \|\boldsymbol{F}_f\|$ s'écrit explicitement comme,

$$m\,\Omega^2 y_1 \ll \frac{m}{\tau}\,\dot{y}_1$$

Compte tenu de cette condition, l'équation du mouvement le long de l'axe Oy_1 du tube, divisée par la masse m, se réduit à,

$$\ddot{y}_1 = -\,\frac{1}{\tau}\,\dot{y}_1$$

Compte tenu de la condition initiale $\dot{y}_1(0) = v_1$ sur la coordonnée de vitesse relative, l'intégrale par rapport au temps de 0 à t de l'équation du mouvement s'écrit,

$$\dot{y}_1(t) = v_1 \exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right)$$

Compte tenu de la condition initiale $y_1(0) = 0$ sur la coordonnée de position relative, l'intégrale par rapport au temps de 0 à t de l'équation de la vitesse donne l'équation horaire $y_1(t)$ le long du tube,

$$y_1(t) = v_1\,\tau\left(1 - \exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

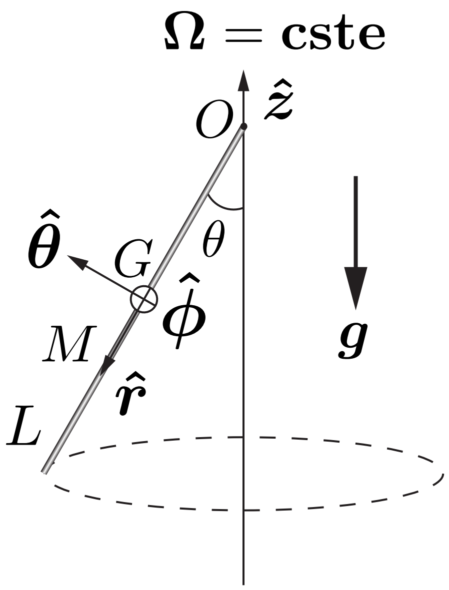
EPFL

3. Barre en précession (3/10 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Une barre indéformable et homogène de masse M, de longueur L, d'épaisseur e négligeable, i.e. $e \ll L$, est fixée à l'une de ses extrémité au point O. L'orientation de la barre fait un angle $\theta = \text{cste}$ avec l'axe vertical passant par l'origine O. La barre est en rotation autour de cet axe vertical à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}} = \textbf{cste}$ où $\hat{\boldsymbol{z}}$ est le vecteur unitaire vecteur orienté vers le haut. Soit $\left(G, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$ le repère d'inertie sphérique lié à la barre et g la norme du champ gravitationnel $\boldsymbol{g}$. Le moment d'inertie de la barre rapport à l'axe principal d'inertie radial $G\hat{\boldsymbol{r}}$ passant par son centre de masse G est négligeable, i.e. $I_{G,r} = 0$. Les moments d'inertie de la barre par rapport aux axes principaux d'inertie nodal $G\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et azimutal $G\hat{\boldsymbol{\phi}}$ passant par son centre de masse G sont égaux et s'écrivent $I_{G,\theta} = I_{G,\phi} = \frac{1}{12}\,ML^2$. On considère qu'il n'y a pas de frottement.

Questions et réponses au verso !

1. (**0.5 point**) Etablir l'expression vectorielle du moment cinétique $\boldsymbol{L}_G$ de la barre évaluée par rapport à son centre de masse G en termes des grandeurs scalaires M, L, Ω, θ et des vecteurs unitaires du repère d'inertie sphérique $\left(G, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$ (n.b. signe inclus) :

   Le vecteur vitesse angulaire s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_r\, \hat{\boldsymbol{r}} + \Omega_\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} = \Omega\left(-\cos\theta\, \hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

   Etant donné que $I_{G,r} = 0$, le moment cinétique $\boldsymbol{L}_G$ de la barre évaluée par rapport à son centre de masse G s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\boldsymbol{L}_G = I_{G,\theta}\, \Omega_\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{12}\, ML^2\, \Omega \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

2. (**1.0 point**) Etablir l'expression vectorielle du moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ de la barre évaluée par rapport à l'origine O en termes des grandeurs scalaires M, L, Ω, θ et des vecteurs unitaires du repère d'inertie sphérique $\left(G, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$ (n.b. signe inclus) :

   Solution 1 : Comme l'origine est immobile, i.e. $\boldsymbol{V}_O = \boldsymbol{0}$, la vitesse $\boldsymbol{V}_G$ du centre de masse s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\boldsymbol{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{OG} = \Omega\left(-\cos\theta\, \hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \times \frac{L}{2}\, \hat{\boldsymbol{r}} = -\frac{L}{2}\, \Omega\, \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

   Le moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ de la barre évaluée par rapport à l'origine O s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{OG} \times M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G = \frac{L}{2}\, \hat{\boldsymbol{r}} \times \left(-\frac{1}{2}\, ML\Omega\, \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right) + \boldsymbol{L}_G = \frac{1}{4}\, ML^2\Omega\, \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{L}_G$$

   ce qui implique que

$$\boldsymbol{L}_O = \frac{1}{3}\, ML^2\Omega\, \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

   Solution 2 : Le théorème d'Huygens-Steiner affirme que le moment d'inertie $I_{O,\theta}$ de la barre par rapport à l'axe principal d'inertie nodal $O\hat{\boldsymbol{\theta}}$ passant par l'origine O s'écrit,

$$I_{O,\theta} = I_{G,\theta} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\, ML^2$$

   Le moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ de la barre évaluée par rapport à l'origine O s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\boldsymbol{L}_O = I_{O,\theta}\, \Omega_\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{3}\, ML^2\, \Omega \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

3. (**1.0 point**) A l'aide d'un théorème de dynamique du solide indéformable, déterminer l'angle $\theta = \text{cste}$ que fait la barre avec l'axe de rotation vertical en termes de grandeurs scalaires constantes données dans l'énoncé :

   La dérivée temporelle du moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ de la barre évaluée par rapport à l'origine O s'écrit,

$$\dot{\boldsymbol{L}}_O = \frac{1}{3}\, ML^2\, \Omega \sin\theta\, \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

   où la dérivée temporelle du vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est donnée par l'équation de Poisson,

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \Omega\left(-\cos\theta\, \hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\Omega\, \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Par conséquent,

$$\dot{\boldsymbol{L}}_O = -\,\frac{1}{3}\,ML^2\,\Omega^2 \sin\theta\,\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

La résultante des moments de forces extérieures $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ évaluée par rapport à l'origine O est dû uniquement au poids $M\boldsymbol{g}$ de la barre appliqué en son centre de masse G. Ainsi,

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \boldsymbol{OG} \times M\boldsymbol{g} = \frac{L}{2}\,\hat{\boldsymbol{r}} \times Mg\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = -\,\frac{1}{2}\,MLg\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Le théorème du moment cinétique évalué au point O,

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{L}}_O$$

projeté selon le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ tangent à la ligne de coordonnées ϕ se réduit à,

$$\frac{1}{2}\,g = \frac{1}{3}\,L\,\Omega^2\,\cos\theta$$

Par conséquent, l'angle de nutation θ entre la barre avec l'axe vertical s'exprime comme,

$$\theta = \arccos\left(\frac{3\,g}{2\,L\,\Omega^2}\right)$$

4. (**0.5 point**) Par rapport au référentiel d'inertie du sol, déterminer l'expression de l'énergie cinétique T de la barre en termes des grandeurs scalaires constantes M, L, Ω et θ.

Solution 1 : L'énergie cinétique totale T de la barre est la somme de l'énergie cinétique associée au mouvement circulaire du centre de masse autour du point C et de l'énergie cinétique associée à la rotation propre de la barre autour du centre de masse G,

$$T = \frac{1}{2}\,M\,\boldsymbol{V}_G^2 + \frac{1}{2}\,I_{G,\theta}\,\Omega_\theta^2 = \frac{1}{2}\,M\left(\frac{L}{2}\,\Omega\,\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\,ML^2\right)(\Omega\sin\theta)^2$$

Ainsi, l'énergie cinétique totale de la barre est,

$$T = \frac{1}{6}\,ML^2\Omega^2\sin^2\theta$$

Solution 2 : L'énergie cinétique totale T de la barre est l'énergie cinétique associée à la rotation de la barre autour de l'origine O à l'extrémité de la barre,

$$T = \frac{1}{2}\,I_{O,\theta}\,\Omega_\theta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\,ML^2\right)(\Omega\sin\theta)^2$$

Ainsi, l'énergie cinétique totale de la barre est,

$$T = \frac{1}{6}\,ML^2\Omega^2\sin^2\theta$$